КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АЛЬ-ФАРАБИ

А.Т. Агишев

СТРОЕНИЕ И ЭВОЛЮЦИЯ ЗВЕЗД

Сборник лекций для студентов бакалавриата, обучающихся по образовательной программе «6В05306 - Физика и астрономия»

Алматы, 2025

Лекция 1. Термодинамическое равновесие

Цель лекции

Показать, как законы термодинамики применяются к описанию внутренней структуры звёзд. Ознакомить студентов с понятием термодинамического равновесия, уравнением состояния звёздного вещества, первым законом термодинамики, понятием энтропии и теплоёмкостей, а также их значением для описания адиабатических процессов в звёздах.

Основные вопросы:

- Понятие термодинамического и локального термодинамического равновесия.
- Первый закон термодинамики в применении к звёздному веществу.
- Энтропия и её физический смысл.
- Теплоёмкости при постоянном объёме и при постоянном давлении.
- Адиабатический температурный градиент и его роль в структуре звезды.

Краткие тезисы:

Термодинамическое равновесие — состояние системы, при котором выполняются тепловое, механическое и химическое равновесия. В звёздах оно выполняется локально, в отдельных слоях — это локальное термодинамическое равновесие (LTE)

Первый закон термодинамики связывает изменения внутренней энергии системы с теплопередачей и выполненной работой: dq=du+Pdv, где dq— количество теплоты, u— внутренняя энергия на единицу массы, $v = 1/\rho$— удельный объём.

Адиабатический процесс — изменение состояния без теплообмена: dq=0, При сжатии ($dw < 0$) температура растёт, при расширении ($dw > 0$) — падает.

Энтропия s – мера необратимости процессов и хаотичности системы. Её изменение определяется соотношением:

$$ds = dq \, / \, T.$$

Теплоёмкости: при постоянном объёме

$$c_V = \left(\frac{dq}{dT}\right)_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v$$

при постоянном давлении

$$c_P = \left(\frac{dq}{dT}\right)_P = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_P + P \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P$$

Между ними существует важное соотношение, где важен коэффициент теплового расширения, и коэффициент изотермической сжимаемости

Адиабатический температурный градиент: определяет, как изменяется температура при движении вещества внутри звезды без обмена теплом.

В глубоких слоях звезды, при подъёме вещества вверх, происходит расширение, охлаждение и рост плотности — это ключ к пониманию **конвекции и устойчивости звёздных слоёв**.

Вопросы для контроля, изучаемого материал:

1) Что понимается под термодинамическим и локальным термодинамическим равновесием?
2) Сформулируйте первый закон термодинамики и его физический смысл.
3) Как определяется энтропия и почему она важна при описании звёзд?
4) В чём различие между cv и cp ?
5) Что такое адиабатический температурный градиент и какое значение он имеет в структуре звезды?
6) Почему при подъёме вещества в звезде его температура падает?

Рекомендуемый список литературных источников:

1) Kippenhahn, R., Weigert, A., & Weiss, A. (2012). *Stellar structure and evolution* (2nd ed.). Springer-Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-642-30304-3
2) Шварцшильд, М. (2009). *Строение и эволюция звезд* (Пер. с англ., 4-е изд.). URSS.
3) Hansen, C. J., Kawaler, S. D., & Trimble, V. (2004). *Stellar interiors: Physical principles, structure, and evolution* (2nd ed.). Springer-Verlag. https://doi.org/10.1007/b97471

Лекция 1. Термодинамическое равновесие

1.1 Простое уравнение состояния: идеальный газ с излучением

Описание структуры звезды требует знания характеристик звездного вещества. В этой главе рассматриваются термодинамические свойства звездного газа. Общим предположением является то, что в каждой точке звезды газ находится в состоянии **термодинамического равновесия**. При таком предположении нет необходимости учитывать детальные реакции между частицами, такими как атомы, электроны, ионы, фотоны, которые составляют основу газа.

1.2 Средние характеристики газа могут быть описаны с помощью *локальных переменных* и взаимосвязей между ними. Следовательно, при заданных температуре, плотности и химическом составе можно определить все остальные параметры — давление, внутреннюю энергию и т. д. Спецификация этих соотношений называется определением **уравнения состояния (EOS)** газа.

В этой лекции мы рассмотрим один пример уравнения состояния, которое имеет важное значение для звезд. Другие реалистичные уравнения состояния можно найти в дополнительных материалах. Сначала мы сосредоточимся на некоторых основных понятиях и кратко напомним фундаментальные соотношения термодинамики, имеющие отношение к структуре звезды.

2.1 Введение в термодинамику, применительно к звёздам

Изменения состояния газа, из которого состоит звезда, имеют важное значение в процессе эволюции звезды. Основное уравнение, описывающее изменение характеристик газа, известно как **первый закон термодинамики**. Далее мы обобщим основные положения термодинамики, которые важно учитывать для понимания внутренней структуры звезды.

2.1.1 Термодинамическое равновесие

Классическая термодинамика описывает системы, которые имеют одинаковую температуру и химический состав и находятся в состоянии **механического** и **термодинамического равновесия**. В общем случае такие условия для звёзд не выполняются. Состояние **механического равновесия** достигается тогда, когда в каждой точке сила давления уравновешивается суммой всех остальных действующих сил. В астрономии это называется **гидростатическим равновесием**.

Рассмотрим теперь объём, содержащий излучение и вещество, который является **адиабатически замкнутым**. Это означает, что теплообмен с окружающей средой невозможен. Если механическое равновесие сопровождается единой температурой внутри объёма, то система находится в состоянии **механического и теплового равновесия**. В общем случае система состоит из реагирующих элементов с изменяющимися во времени концентрациями из-за химических реакций. Когда плотность и температура остаются постоянными, относительные концентрации частиц также остаются неизменными. Это называется **химическим равновесием**. Если одновременно достигаются химическое и тепловое равновесие, система перестаёт изменяться. Такое состояние называется **термодинамическим равновесием**.

Хотя классическая термодинамика не всегда строго применима к звёздам, она используется для описания их структуры. Звезду можно разделить на большое число слоёв, каждый из которых достаточно тонок, чтобы внутри него выполнялись условия равновесия в смысле классической термодинамики. В астрономии это состояние называется **локальным термодинамическим равновесием (LTE)**. Если LTE является хорошим приближением, то основные законы классической термодинамики справедливы внутри каждого слоя звезды, даже если звезда в целом не находится в состоянии термодинамического равновесия.

2.1.2 Первый закон термодинамики

Рассмотрим работу, связанную с изменением объёма системы. Пусть P — это давление на поверхности системы, а сама система испытывает изменение поверхности. Работа, совершаемая системой на единицу поверхности, равна:

$$dW = P\,dV$$

В астрономии часто используют работу на единицу массы W. Введём удельный объём

$$v = 1\,/\,\rho$$

где ρ — плотность вещества. Тогда получаем:

$$dw = P\,dv$$

Теперь рассмотрим бесконечно малое термодинамическое преобразование системы, связанное с малыми изменениями давления, плотности и температуры. Определим:

- dq — количество теплоты, поглощаемое системой на единицу массы,
- dw — работа, совершаемая системой на единицу массы.

Первый закон термодинамики утверждает, что:

$$du = dq - dw$$

где u — **внутренняя энергия** системы на единицу массы. Следовательно, внутренняя энергия системы может изменяться либо за счёт работы, либо за счёт теплопередачи (нагрев или охлаждение). Первый закон термодинамики устанавливает связь между количеством теплоты dq, внутренней энергией u и удельным объёмом v=1/ρ (каждый параметр задан на единицу массы):

$$dq = du + P\,dv \quad (2.1)$$

Адиабатический процесс — это процесс, при котором система не получает и не теряет тепло:

$$dq = 0$$

В адиабатическом процессе изменение внутренней энергии противоположно по знаку работе, совершаемой системой.

- Если dw<0 (сжатие), внутренняя энергия увеличивается, что сопровождается ростом температуры.
- Если dw>0 (расширение), внутренняя энергия уменьшается, что сопровождается понижением температуры.

Когда процесс сжатия или расширения происходит очень быстро, он приближённо адиабатичен, так как теплообмен практически не успевает произойти.

2.1.3 Энтропия

Предположим, что система проходит через ряд состояний термодинамического равновесия. Такой процесс называется **квазистатическим преобразованием**. Если при этом процесс обратим (без потерь энергии на трение и т. п.), его называют **обратимым преобразованием**. Определим величину s, называемую **энтропией системы** (на единицу массы), через:

$$ds = dq\,/\,T.$$

Согласно первому закону термодинамики:

$$du = T\,ds - P\,dv.$$

Таким образом, энтропия определена только для состояний термодинамического равновесия, а её изменение можно вычислить через первый закон.

2.1.4 Теплоёмкость

С математической точки зрения удобно ввести обобщённые теплоёмкости:

$$c_\alpha = \left(\frac{\partial q}{\partial T}\right)_\alpha \quad (2.2)$$

Это означает, что cα — количество теплоты, которое система должна поглотить, чтобы температура выросла на единицу (при фиксированном параметре α). С физической точки зрения особенно важны два случая:

1. **Теплоёмкость при постоянном давлении:**

$$c_P = \left(\frac{dq}{dT}\right)_P = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_P + P\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P \quad (2.3)$$

2. **Теплоёмкость при постоянном объеме:**

$$c_V = \left(\frac{dq}{dT}\right)_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v \quad (2.4)$$

При поиске зависимости между теплоёмкостями cP и cV рассмотрим общее уравнение состояния:

$$\rho = \rho(P, T), u = u(\rho, T)$$

В общем случае ρ и u зависят также от химического состава, но здесь предполагаем его постоянным. Введём следующие производные:

$$\alpha = \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln T}\right)_\rho = -\left(\frac{P}{v}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T$$

$$\delta = -\left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T}\right)_P = \left(\frac{T}{v}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P \quad (2.4)$$

Тогда уравнение состояния можно записать как:

$$\frac{dp}{\rho} = \alpha\left(\frac{dP}{P}\right) - \delta\left(\frac{dT}{T}\right) \quad (2.5)$$

Используя (2.1), получаем:

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T dv + \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v dT \quad (2.6)$$

Для изменения энтропии:

$$ds = \frac{dq}{T} = \left(\frac{1}{T}\right)\left[\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T + P\right] dv + \left(\frac{1}{T}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v dT \quad (2.7)$$

Так как ds является полным дифференциалом, выполняется равенство смешанных производных:

$$\frac{\partial}{\partial T}\left[\left(\frac{1}{T}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T + \frac{P}{T}\right] = \left(\frac{1}{T}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial T\,\partial v}\right) \quad (2.8)$$

После преобразований получаем:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v - P \quad (2.9)$$

Это соотношение называется **отношением взаимности (reciprocity relation)**. Чтобы найти разность $cP - cV$, используем (2.6). Принимаем P и T в качестве независимых переменных:

$$\frac{du}{dT} = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v + \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P \quad (2.10)$$

Следовательно:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_P = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v + \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v + \left[T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v - P\right]\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P \quad (2.11)$$

Подставляя (2.9), окончательно получаем:

$$c_P - c_V = T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v \quad (2.12)$$

Таким образом, мы вывели фундаментальное соотношение между теплоёмкостями при постоянном давлении и постоянном объёме. Используя правые части в определениях α и δ из уравнений (2.4), получаем:

$$\frac{P\delta}{(T\alpha)} = -\frac{\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P}{\left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T} = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v \quad (2.13)$$

Подставляя $T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P = v\delta = \frac{\delta}{\rho}$, получаем основное соотношение:

$$c_P - c_V = \frac{(P\,\delta^2)}{(T\,\rho\,\alpha)} \quad (2.14)$$

Таким образом, разность теплоёмкостей можно определить полностью через производные уравнения состояния.

Первый закон термодинамики в переменных давления и температуры запишем в виде:

$$dq = du + P\,dv = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v dT + \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T dv + P\,dv \qquad (2.15)$$

Используя (2.9) и определения для v (2.13), получаем:

$$dq = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v dT + T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v dv = c_V dT - T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v \left(\frac{1}{\rho^2}\right) d\rho$$
$$= c_V dT - \left(\frac{P\,\delta}{(\rho\,\alpha)}\right)\left(\frac{d\rho}{\rho}\right) \qquad (2.16)$$

или, в более удобной форме:

$$dq = c_V dT - \left(\frac{P\,\delta}{(\rho\,\alpha)}\right)\left(\alpha\frac{dP}{P} - \delta\frac{dT}{T}\right) = \left(c_V + \frac{P\,\delta^2}{T\,\rho\,\alpha}\right) dT - \left(\frac{\delta}{\rho}\right) dP \quad (2.17)$$
$$dq = c_P dT - \left(\frac{\delta}{\rho}\right) dP \qquad (2.18)$$

В адиабатических процессах энтропия постоянна, $ds = \frac{dq}{T} = 0$. Введём **адиабатический температурный градиент** ∇_{ad}:

$$\nabla_{ad} = \left(\frac{\partial\,ln\,T}{\partial\,ln\,P}\right)_s \qquad (2.19)$$

Из (2.18) следует:

$$\left(\frac{dT}{dP}\right)_s = \frac{\delta}{(\rho\,c_P)}$$

и, следовательно,

$$\nabla_{ad} = \left(\frac{P}{T}\right)\left(\frac{dT}{dP}\right)_s = \frac{(P\,\delta)}{(T\,\rho\,c_P)} \qquad (2.20)$$

Величина ∇_{ad} определяет изменение температуры, воспринимаемое частицами газа при адиабатическом расширении. Такой процесс сопровождается изменением давления без теплообмена с окружением.

- Массовые элементы, находящиеся глубоко внутри звезды, при подъёме в верхние слои расширяются (давление падает), охлаждаются и становятся плотнее окружающей среды.
- Из-за этого они опускаются обратно.
- Расширение сопровождается уменьшением температуры.

Таким образом, **адиабатический градиент** ∇_{ad} определяет характер температурного профиля звезды при адиабатическом перемещении вещества.